Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège

Christophe Alves, Vincent Duval, Alexandra Goislard, Hélène Kuhman, Sylvie Martin Dametto, Claire Piolti Lamorthe, Sophie Roubin, Sylvie Coppé

Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège

Christophe Alves, Lycée Saint Exupéry , Lyon 4
Vincent Duval , Collège F. Truffaut, Lyon 1
Alexandra Goislard, Collège J. Duclos, Vaulx en Velin
Hélène Kuhman, Collège Lamartine, Villeurbanne
Sylvie Martin Dametto Centre Alain Savary, IFE, ENS lyon
Claire Piolti Lamorthe, Collège Ampère, Lyon 2
Sophie Roubin, Collège Ampère, Lyon 2
Sylvie Coppé
IUFM de Lyon, Université Lyon 1
UMR ICAR (Université Lyon 2, CNRS, ENS Lyon)

Dans cet article, nous souhaitons rendre compte d'une partie du travail que nous faisons dans le cadre d'une recherche collaborative intitulée SESAMES (Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation) qui a pour but la production collaborative (par des enseignants et des chercheurs, chacun apportant une expertise dans son domaine) de ressources pour les enseignants et les formateurs de mathématiques favorisant la mise en activité des élèves et leur prise de responsabilité vis-à-vis des savoirs enseignés. Notre thème est celui de l'enseignement de l'algèbre au collège. Ces documents produits sont disponibles sur le site http://pegame.ens-lyon.fr/. Nous avons également travaillé dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) qui vise à étudier l'évolution des pratiques des enseignants vers la mise en place des séances qui permettent aux élèves d'être plus actifs dans leurs apprentissages notamment en utilisant les démarches d'investigation ou des dispositifs proches.

Le travail fait dans le groupe consiste à élaborer et à diffuser des documents pour les professeurs et les formateurs de mathématiques. Les documents proposés sont constitués d'une part d'activités ou de séances/séquences de classe, conformes aux instructions officielles actuelles à la fois en termes de savoirs enseignés et de démarches pédagogiques (rubrique "Enseigner" du site). Ils sont destinés à aider les professeurs dans leur pratique quotidienne pour qu'ils élaborent des séances de classe dans lesquelles l'activité mathématique des élèves et leur responsabilité face aux apprentissages mathématiques sont favorisées. Nous décrivons également la gestion de classe associée qui doit permettre d'une part pour les élèves, d'avoir des temps de recherche, d'expérimentation, d'argumentation et de mise en commun et d'autre part, pour le professeur, d'organiser des institutionnalisations qui sont en lien avec ce qui a été fait. En d'autres termes, nous travaillons particulièrement sur la dialectique dévolution/institutionnalisation.

D'autres documents (rubrique « Se former » du site) ont pour objectif d'aider à l'appropriation des premiers en explicitant et justifiant les choix faits ou en donnant à voir des productions d'élèves. Toutes ces ressources prennent en compte des résultats de recherche portant sur les conceptions des élèves, des analyses épistémologiques sur le savoir, des hypothèses d'apprentissage, des hypothèses sur le langage et sur les représentations symboliques.

Dans cet article, nous souhaitons montrer des utilisations des programmes de calcul pour introduire et travailler des éléments relatifs à l'algèbre. Tout d'abord précisons ce que nous entendons par introduction de l'algèbre. Pour cela, nous reprenons une citation de Vergnaud, 1989 qui pose le problème :

> Par "introduction à l'algèbre", on peut entendre plusieurs choses distinctes :
> - mise en équation de problèmes arithmétiques simples et résolution par l'algèbre ;
> - règles élémentaires de traitement et de transformation des équations ;
> - première explicitation des concepts de fonction et de variable ;
> - mise en évidence de certaines propriétés structurales des ensembles de nombres, notamment l'ensemble des relatifs et de l'ensemble des rationnels ;
> - etc…
>
> Il est raisonnable de penser que c'est un savant équilibre de ces différentes composantes conceptuelles et des situations qui leur donnent du sens qui peut permettre aux élèves de comprendre en profondeur la fonction, la structure et le fonctionnement du raisonnement algébrique. Mais quel équilibre ? (Vergnaud, 1989, op.cite)

Bednarz, Kieran et Lee, 1996 repèrent quatre entrées pour l'introduction et le développement de l'algèbre dans le secondaire :

- une perspective de généralisation (par la construction de formules)
- une perspective de résolution de problèmes (par les équations)
- une perspective de modélisation
- une perspective fonctionnelle.

On voit bien ici que d'une part, l'entrée dans l'algèbre ne se limite pas au travail sur les techniques de calcul algébrique et à la mise en équation, et que d'autre part, l'algèbre est aussi un outil pour résoudre des problèmes qui permettront de donner du sens aux notions et aux objets rencontrés. On retrouve là la dialectique outil/objet au sens de Douady, 1986.

A. Origines de ce travail et du groupe de recherche

Comme nous l'avons dit, à l'origine de ce travail, il y avait une volonté d'élaborer et de diffuser des activités pour la classe permettant aux élèves d'être actifs dans la construction de leurs connaissances. Nous avons choisi l'algèbre car c'est un thème enseigné tout au long du collège, qui conditionne les apprentissages futurs, notamment celui de l'analyse, mais dont l'enseignement nous semble trop souvent centré sur les aspects techniques (pour preuve, dans les manuels, une majorité d'exercices portant sur développer, réduire ou factoriser des expressions littérales). Nous avions également connaissance de certaines difficultés des élèves et du fait que les professeurs de lycée se plaignent car les élèves ne sont pas capables d'introduire une lettre dans un problème si elle n'est pas explicitement demandée.

Il nous a donc fallu trouver des éléments d'explication de ces premiers constats. C'est ce que nous allons faire dans la partie suivante. Notre étude s'appuie principalement sur l'analyse des programmes de 2005 et 2008 et des manuels. Pour les programmes, nous avons déterminé la nature et la place des notions algébriques. Pour les manuels, nous avons étudié principalement les activités d'introduction de la lettre ainsi que la place des éléments théoriques.

1. Un émiétement de l'algèbre dans les programmes du collège

Chevallard, 1985, en analysant l'évolution des programmes jusqu'à ceux de 1978 (contre réforme des mathématiques modernes) a montré que l'algèbre en tant que secteur a disparu au profit du numérique.

> Ce qui disparaît, en fait, à l'exception notable – répétons-le - des problèmes pratiques ce n'est pas l'arithmétique (même si le mot lui-même ne renvoie plus qu'à une des parties du corpus arithmétique traditionnel), mais la dialectique de l'arithmétique et de l'algèbre. Or cet affaissement d'une structuration traditionnelle va moins peser sur la composante arithmétique que sur la composante algébrique des mathématiques enseignées au collège : c'est l'algèbre (entendue au sens traditonnel de ce mot à ce niveau des études mathématiques) qui va se trouver le plus violemment mise en cause par les changements opérés. (Chevallard, op.cite)

C'est encore le cas actuellement et dans des articles plus récents, Chevallard et Bosch, 2012 parlent de « la péjoration culturelle de l'algèbre en tant qu'œuvre ».

Ainsi actuellement, rappelons que pour l'ensemble du collège, les programmes sont découpés en quatre secteurs et qu'aucun d'entre eux n'est intitulé « algèbre ».

1. Organisation et gestion de données. Fonctions
2. Nombres et calculs
3. Géométrie
4. Grandeurs et mesures. Ce dernier secteur est apparu dans le programme de 2005.

Notons aussi que le terme « calcul littéral » n'apparaît qu'en classe de 4ème ; on peut donc se demander quel est le statut des calculs avec des lettres qui sont faits en 5ème.

Commençons par déterminer où se trouve ce qui relève de l'algèbre élémentaire et, rapidement, quels sont les contenus classe par classe. Tout ce qui concerne la notion de fonction et donc de variable est dans le secteur 1, ce qui est indiqué explicitement dans le titre (ce qui ne veut pas dire qu'on ne va pas utiliser les fonctions dans les autres domaines).

Les formules et leur utilisation sont mentionnées dans la dernière partie « Grandeurs et mesures ». Par exemple, en classe de 6ème, on trouve une injonction à introduire des écritures littérales à partir des formules *« Le travail sur les périmètres permet aussi une initiation aux écritures littérales ».* Ceci montre que les auteurs des programmes envisagent bien une entrée progressive dans l'algèbre depuis le début du collège voire de l'école primaire puisque les formules y ont déjà été rencontrées.

Depuis 2005, en classe de 5ème, les formules de distributivité simple sont dans la partie 2 alors que l'on trouve des injonctions à utiliser les expressions littérales dans la partie 1 « *Utiliser/produire une expression littérale »* et dans la dernière « *De nombreux thèmes du programme (grandeurs et mesures) conduisent à utiliser des expressions littérales (formules)* ». Le propos est donc plus précis qu'en classe de 6ème puisqu'au delà de l'injonction, il y a une indication d'un type de tâches à réaliser sans que la finalité soit vraiment précisée (on ne sait pas pourquoi on produit une expression littérale, ni dans quels cas on pourrait l'utiliser). En classe de 4ème, on indique qu'il faut *« savoir choisir l'écriture appropriée d'une ... expression littérale suivant la situation ».* Enfin, dans la partie 2, (Calcul numérique), on introduit la notion de programme de calcul mais sur du numérique. On peut certainement voir, là encore, une passerelle vers une activité algébrique mais pourquoi seulement sur du numérique ?

En classe de 4ème, nouvelle précision de ce qui est désigné par des « axes » dont le dernier a été introduit dans le programme de 2008 :

> Le travail proposé s'articule autour de trois axes :
> - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ;
> - utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;
> - utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).
>
> (BO, 2008)

Depuis 95, en classe de 5ème le programme donne explicitement le type de tâches : *« Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.* » mais, ceci dans le cadre des équations alors qu'il pourrait aussi être mis en relation avec le calcul littéral. On peut penser que les contrôles de l'équivalence des expressions ne seront pas ou peu encouragés car le type de tâches « tester une égalité » reste isolé.

Tout ceci nous amène à une première conclusion : les notions algébriques sont disséminées dans les différents secteurs du programme et il y a un risque que l'on perde la cohérence de l'ensemble des tâches algébriques et de leur finalité. Dans ce cas, on risque d'avoir des organisations mathématiques locales avec des types de tâches isolées et sans finalité.
Un autre point est le découpage dans le temps. Par exemple, pour le calcul littéral, en 5ème et 4ème on met en avant les types de tâches de développement (soit avec des expressions du type k(a+b) soit (a+b)(c+d)), puis en classe de 3ème, on introduit les factorisations d'expressions littérales. On constate donc qu'il y a un découpage dans le temps entre certaines notions et certains types de

tâches. Or, il faut bien noter que lorsqu'on travaille sur les expressions littérales (par exemple dans les types de tâches développer, réduire ou factoriser) on utilise la propriété de distributivité. Par exemple, quand on passe de l'écriture de 3x +5x à 8x, on le justifie en factorisant par x. Donc la technique associée à ce type de tâches est bien de factoriser par x et la propriété de distributivité en est un élément technologique.

Si on comprend bien la volonté de progressivité dans les apprentissages, on peut cependant penser que ce découpage entre les différentes années risque d'avoir une influence sur les organisations mathématiques (au sens de Chevallard, 1998, 1999) mises en place par les professeurs. On peut penser que cela risque de provoquer un enseignement de l'algèbre élémentaire assez découpé, un émiettement des notions, un rabattement sur des types de tâches techniques et une non visibilité des éléments technologiques et donc, peut empêcher les élèves de voir la puissance de l'outil algébrique ainsi que ses finalités, comme le soulignait déjà Chevallard, 1985, 1989.

Ceci est également montré dans des études portant sur les situation de classe et sur le professeur comme dans les thèses de El Mouhayar, 2007 sur les phases de correction en algèbre, Coulange, 2000 sur les systèmes d'équations ou bien Lenfant, 2002 et Ben Nejma, 2009 sur les pratiques d'enseignement en algèbre. Les conclusions vont dans le même sens. D'une part, les activités proposées aux élèves portent le plus souvent sur les techniques algébriques ; il y a donc une centration sur l'aspect objet de l'algèbre plutôt que sur l'aspect outil. D'autre part, les techniques ne sont pas toujours justifiées par des éléments théoriques comme la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

2. Introduire la lettre

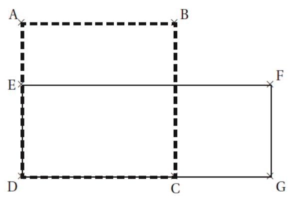
Comme nous le disons plus haut, les élèves de 2nde (élèves de 15-16 ans) semblent avoir des difficultés importantes pour mobiliser leurs connaissances algébriques pour résoudre des problèmes. En particulier, il semble que les élèves des classes de 3ème (élèves de 14-15 ans) ou de 2nde ont du mal à introduire une lettre dans un problème si on ne la leur donne pas (voir par exemple, Coulange, 2000). Ceci provient certainement du fait que, d'une part, l'aspect modélisation est peu mis en avant actuellement lors de l'introduction de l'algèbre élémentaire et que, d'autre part, les types de tâches portant sur l'aspect purement technique du calcul algébrique prennent le pas sur d'autres types de tâches qui donneraient du sens à la pratique algébrique. Nous pensons donc que les notions algébriques sont plutôt enseignées comme des objets que comme des outils, notamment de modélisation mais pas seulement (repéré aussi par Grugeon, 1995).

Or, dans les manuels, les exercices proposés sont très guidés, ils imposent le plus souvent la variable ou l'inconnue (« appelle x le … ») et proposent de nombreuses questions intermédiaires qui ne permettent pas de recherche personnelle et de prise d'initiatives.

Cependant depuis plus de 30 ans (début de la contre réforme des mathématiques), les programmes de collège et de lycée insistent sur la mise en activité des élèves comme condition à l'acquisition des connaissances mathématiques. La résolution de problèmes a pris ainsi une place importante dans les discours institutionnels, à la fois pour l'introduction des notions nouvelles et pour leur réinvestissement. Plus récemment en 2005, la démarche d'investigation a été introduite dans les programmes du collège pour les disciplines scientifiques. Celle–ci est présentée comme une démarche d'enseignement basée sur la mise en questionnement et en activité des élèves, avec cependant des différences épistémologiques suivant les disciplines : pour les mathématiques, on insiste sur la résolution de problèmes et la validation par la démonstration. Tout ceci suppose des changements importants dans les pratiques professionnelles des enseignants pour laisser davantage de responsabilité aux élèves sur le savoir. Mais les pratiques se modifient très lentement parce que les représentations du métier évoluent peu et parce que les outils à disposition des professeurs sont encore peu satisfaisants. Les professeurs doivent en effet élaborer des activités motivantes, ouvertes, qui constituent de vrais problèmes, et mettre en place une gestion de classe adaptée qui permette aux élèves de prendre des responsabilités dans l'avancée du savoir, de pouvoir expérimenter, argumenter.

On peut voir toutefois que les sujets du brevet des collègues ont un peu évolué dans ce sens en proposant notamment des exercices comme celui-ci (Brevet de collèges 2012).

Exercice 1
Le dessin ci-dessous représente une figure composée d'un carré ABCD et d'un rectangle DEFG.
E est un point du segment [AD].
C est un point du segment [DG].
Dans cette figure la longueur AB peut varier mais on a toujours : AE = 15 cm et CG = 25 cm.



2. Peut-on trouver la longueur AB de sorte que l'aire du carré ABCD soit égale à l'aire du rectangle DEFG?
Si oui, calculer AB. Si non, expliquer pourquoi.
Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

Mais les résultats restent encore faibles : la question 2 est réussie par seulement 13% des élèves et, tout aussi important, 44% des élèves n'ont pas abordé la question.

3. Passage arithmétique/algèbre

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre est une question de recherche importante sur laquelle portent plusieurs études questionnant l'articulation, en termes de ruptures et de continuités, entre les deux comme l'indique Vergnaud, 1988 :

> « L'algèbre constitue pour les élèves une rupture épistémologique importante avec l'arithmétique. Cette rupture mérite une analyse détaillée, car beaucoup d'élèves n'entrent pas facilement dans le jeu des manipulations symboliques ». (Vergnaud op.cite)

Chevallard, 1985, 1989, 1990 ou Gascon, 1994 montrent que souvent l'algèbre élémentaire est assimilée à une arithmétique généralisée dans le sens où le symbolisme algébrique serait seulement un prolongement et une généralisation du langage arithmétique. Or selon eux, ce n'est pas le cas car les symboles employés (lettres, signe égal, signes opératoires, etc) n'ont pas le même statut et les types de problèmes que l'algèbre permet de résoudre sont différents. Kieran, 1990 parle de fausses continuités et discontinuités. Vergnaud, 1989 a distingué les procédures arithmétiques et algébriques dans la résolution des problèmes (repris par Schmidt et al, 1997).

Or de nombreux exercices de manuels imposent à l'élève des méthodes de résolution utilisant, par exemple, les équations sans que cela soit indispensable, c'est-à-dire que l'élève peut résoudre le problème avec ses connaissances anciennes, notamment des procédures arithmétiques. Ainsi le problème suivant que l'on trouve assez souvent dans les manuels :

Je pense à un nombre, je lui ajoute 34, je multiplie par 7 le résultat et je trouve 112. Quel était le nombre de départ ?

Ce problème peut facilement être résolu par une procédure arithmétique qui consiste à "remonter" les calculs : ainsi, on calcule 112 : 7 = 16 et 16 – 34 = - 18. Les élèves ont l'habitude de faire ce genre de raisonnement notamment à l'école primaire. On voit bien sur cet exemple que l'emploi des équations ne se justifie pas ici et que cet exercice ne nous semble pas être un bon candidat pour introduire l'outil équation. Il est donc nécessaire d'élaborer des problèmes dans lesquels l'utilisation de la lettre se révèle être une méthode sinon nécessaire mais au moins performante. On pouvait déjà trouver des idées dans Combier et al., 1996.

De plus, les objets sur lesquels on travaille (lettres, signe égal, signes opératoires, etc) sont les mêmes mais leur utilisation doit être modifiée. Ainsi des travaux de recherche ont porté sur les statuts de ces différents objets comme ceux de Kieran, 1990, Schmidt, 1996. D'autres portent sur les erreurs (Behr et al., 1980, Booth, 1985, Drouhard, 1992, Grugeon, 1995 et Kirshner et al., 2004) en prenant notamment en compte les dimensions sémantiques et syntaxiques. Par exemple, Drouhard, 1992 distingue le sens et la dénotation des expressions : ainsi les deux expressions $(x+1)^2$ et $x^2 + 2x +1$ ont la même dénotation mais le sens est différent ; par exemple, dans la première on

« verra » un carré ce qui n'est pas le cas pour la deuxième. De plus il sera plus aisé d'utiliser l'une ou l'autre suivant les problèmes.
Sfad, 1991 propose une distinction entre les dimensions structurales et opérationnelles des concepts. Ainsi en algèbre, une même expression peut avoir différentes interprétations selon les contextes. Par exemple 2n+1 peut être interprétée comme un processus (je choisis un nombre, je le multiplie par 2 et j'ajoute 1) ou bien comme l'écriture d'un nombre impair quelconque.
Nous soulignons là l'importance de travailler ces différentes dimensions qui jouent encore une fois sur la dialectique outil/objet.

4. La place des justifications

A partir d'une analyse de manuels de 5ème, nous avons montré (Assude, Coppé et Pressiat, 2012) que les éléments théoriques qui permettent les justifications et les contrôles ne sont pas clairement affichés; notamment la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition n'est pas toujours mise en avant comme la justification de la validité des calculs littéraux.

> Il en résulte que la propriété de distributivité perd sa prépondérance technologique pour justifier et valider les calculs. Il y a donc un risque que les élèves ne l'utilisent pas et se rabattent sur des techniques portant sur les transformations d'écritures exclusivement basées sur des ostensifs, avec des critères de vérification peu opérationnels portant sur la forme. (Assude et al., op cite)

La propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition est introduite formellement en 5ème, dans la partie 2, mais il n'y a que peu de types de tâches en lien et elle peut donc être assez vite oubliée par les élèves puisqu'ils ne voient pas son utilité. Or, c'est elle qui permet de justifier toutes les règles de calcul littéral, de développement et de factorisation. Il revient donc au professeur de faire vivre cette formule pour qu'elle prenne tout son sens, c'est–à–dire autrement que pour faire des calculs de différentes façons.

De plus, elle est donnée avec ses deux formulations (addition et soustraction) : en 5ème cela s'explique puisque la multiplication des relatifs n'est pas au programme, mais en 4ème on pourrait n'en garder qu'une. Ceci montre, selon nous, que la rupture entre arithmétique et algèbre n'est pas complètement assumée (la formulation était la même en 95).

Il y a là une ambiguïté qui n'est pas levée par le programme. En effet, si la formule est utilisée dans un cadre arithmétique, il est essentiel d'avoir les deux égalités, elle peut alors apparaître comme un élément de technologie dans le cadre d'un type de tâches de calcul mental comme 101x 24 ou 99 x 32. En revanche, si l'on travaille dans un cadre algébrique avec des nombres relatifs, seule l'égalité avec l'addition est nécessaire. Nous pensons que donner ces deux formules peut se révéler être une difficulté pour les élèves notamment pour les procédures de contrôle sur les signes.

Enfin, l'étude des manuels de $5^{ème}$ montre que, dans le cours, la distributivité n'est pas mise en évidence comme par exemple, les théorèmes de géométrie :

> La propriété de distributivité est institutionnalisée avec différentes désignations : règle, propriété, égalité vraie, identité ou bien seulement citée et entourée par un cadre avec une importante utilisation d'ostensifs : flèches, couleurs pour distinguer somme et produit. C'était également le cas dans les manuels de la période précédente. L'ensemble de référence des nombres sur lequel porte la propriété n'est pas toujours indiqué : par exemple, « *a, b* et *k* représentent 3 nombres ». Enfin, la distributivité n'est pas toujours première, elle peut être précédée par le type de tâches « développer ou factoriser une expression littérale donnée ». Ces deux types de tâches sont séparés, la distributivité pouvant être spécifiée selon chacun. Ceci contribue, selon nous, à accentuer l'atomisation des tâches. (Assude et al., ibid)

Il est étonnant de constater qu'un travail didactique important est fait pour les démonstrations en géométrie, en exigeant notamment l'énoncé explicite des théorèmes ; or ce travail n'est pas repris en algèbre comme si les règles, les théorèmes étaient alors moins importants ou comme si le calcul fonctionnait sans règles. Bien sûr, nous touchons là un point important qui concerne les automatismes de calcul. D'une part, il est important que les élèves acquièrent des automatismes de calcul qui leur permettent de faire des calculs rapidement sans avoir à citer les règles : c'est le propre des automatismes. Mais d'autre part, on peut penser que durant l'apprentissage des règles du calcul algébrique, le professeur porte une attention particulière à la justification des calculs par les règles.

B. Les programmes de calcul

En prenant en compte ces constats, nous avons élaboré des activités qui permettent notamment d'introduire la lettre dans des problèmes qui le nécessitent mais également de donner des éléments de justifications des calculs algébriques. Les problèmes que nous proposons sur le site comportent en général une seule question, la démarche n'est pas indiquée et il n'y a pas d'injonction sur l'emploi d'une lettre comme inconnue, variable ou indéterminée.

Enfin, plus récemment, nous avons travaillé sur la question du lien entre sens et technique et sur la conception non plus d'activités isolées mais de séries d'activités liées entre elles proposant une progression dans l'avancée du savoir. En effet, nous pensons que le travail montrant l'aspect outil de l'algèbre doit être mené en même temps que celui portant sur les techniques de calcul littéral et non pas successivement. En effet si l'on travaille d'abord sur la technique (ce qui est souvent le cas) les élèves ne peuvent pas voir la finalité de ce qu'ils font (et ils ne comprennent pas pourquoi brusquement on travaille avec des lettres) et si l'on ne travaille que le sens, il est difficile de proposer des problèmes intéressants puisque le manque de maîtrise des techniques de calcul fait obstacle. Ce point est particulièrement difficile à gérer en ce qui concerne l'algèbre élémentaire du collège.

Pour cela nous avons élaboré des séries d'activités utilisant les programmes de calcul, c'est ce que nous allons montrer dans la partie suivante.

La gestion de classe associée est particulière (elle est décrite dans Piolti et Roubin, 2010, et Martin Dametto et al., 2013). Ces activités sont proposées aux élèves en tout début de séance pendant 15 à 20 minutes (parfois davantage si nécessaire). Les élèves ont un temps de recherche personnel qui se termine par une mise en commun des résultats ou des procédures et enfin des éléments d'institutionnalisation sont co-construits par le professeur et les élèves. Ceux-ci sont ensuite réinvestis dans des activités proposées aux séances suivantes. Ceci se déroule avant pour introduire ou après pour réinvestir le chapitre en jeu. L'organisation didactique, consiste donc en une alternance de moments de première rencontre et de travail de la technique, entrecoupés de moments d'institutionnalisation voire d'évaluation.

Avant de donner ces exemples, voici quelques références sur les programmes de calcul.

Notons tout d'abord que le terme programme de calcul en algèbre n'apparaît pas dans les programmes scolaires de 2008. En revanche, ils sont présentés à l'aide de deux exemples dans le document d'accompagnement « Du numérique au littéral », 2008[1] et développés dans le « Vade-mecum des principaux éléments mathématiques », 2009[2].

Drouhard, 2005 introduit la notion de programme de calcul dans ses travaux sur la didactique de l'algèbre, en prenant le point du vue du langage, en référence à Frege.

> Le sens d'une écriture nous permet de voir comment elle est faite, comment on peut la calculer (« mode de donation de l'objet » ; il nous permet également d'avoir des informations sur ce qu'on peut en faire (telle forme est factorisable, telle autre est développable, dans le cadre de la résolution d'une équation telle forme est préférable etc.) (Drouhard, op.cite)

Chevallard, 2007 consacre une partie de ses cours aux professeurs de mathématiques stagiaires à la notion de programme de calcul. Nous ne reprenons pas ici les exemples donnés, nous invitons le lecteur à s'y référer (p.167-171).

> Il est de même usuel de parler d'expression algébrique, sans que l'on sache ce que cette « expression » exprime ! Pour qu'il en aille autrement, il convient de partir de ce dont nous parle l'algèbre : $3x^2$, par exemple, est l'expression algébrique (ou littérale) d'un certain programme de calcul, à savoir le programme de calcul qui, étant donné un nombre x, « renvoie » le nombre $3x^2$, et qui, donc, pour $x = 1$, renvoie 3, pour $x = 4$ renvoie 48, etc. L'algèbre élémentaire est ainsi la science des programmes de calcul (sur les nombres), et en particulier la science du calcul sur les programmes de calcul. La notion de ***programme de calcul*** se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de « faire un calcul », c'est-à-dire le fait d'opérer sur des nombres d'une manière déterminée, ***selon un certain programme***. (Chevallard, op.cite)

Enfin dans Assude et al., 2012, nous développons l'idée de la potentialité de l'utilisation des programmes de calcul pour travailler sur les expressions littérales. Il faut remarquer aussi que les textes décrivant les programmes sont simples à travailler pour les élèves.

---

[1] DOCUMENT RESSOURCES "DU NUMERIQUE AU LITTERAL" (2008)
Site du Ministère : http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

[2] Site du Ministère : http://eduscol.education.fr/cid45766/mathematiques-pour-le-college-et-le-lycee.html#lien1

> Les programmes de calcul conservent la fonction didactique de support d'exercices, sans apparaître comme un objet paramathématique contribuant à la construction de l'organisation mathématique. Nous faisons ainsi l'hypothèse que, dans le curriculum officiel, l'introduction des programmes de calcul ouvre des potentialités qui restent inexplorées. (Assude et al., op.cite)

Nous pensons donc que les programmes de calcul constituent un outil pour les professeurs (et pour les élèves, bien sûr) qui devrait permettre de travailler sur l'introduction de l'algèbre au collège notamment en ce qui concerne d'une part la résolution d'équation et d'autre part les activités de preuve. Notons que dans cet article, nous choisissons de séparer ces deux types de tâches mais on peut aussi envisager qu'ils n'en forment qu'un seul comme : étant donné deux programmes de calcul savoir s'ils donnent toujours le même résultat pour tous les nombres d'un ensemble donné et sinon, déterminer pour quelles valeurs c'est le cas. Une des techniques peut être de faire des essais, puis d'émettre une conjecture et de la prouver en utilisant les règles du calcul algébrique qui fonctionneront bien alors comme des éléments de justification pour transformer les expressions.

C. Des exemples d'utilisation des programmes de calcul

Nous allons maintenant montrer l'utilisation des programmes de calcul dans les deux types de tâches citées ci-dessus. Dans cet article, nous ne donnons qu'un exemple simple et sur le même modèle pour chacun des programmes. Bien sûr, en classe, des programmes plus complexes sont proposés. Les propriétés relevant de la distributivité sont mises en place parallèlement à ces programmes.

Enfin, nous précisons à nouveau que l'activité algébrique ne se limite pas à ces types de problèmes. D'autres entrées sont travaillées notamment celle de la modélisation.

1. Pour résoudre des équations

Nous proposons une organisation mathématique au sens de Chevallard, 1998, 1999 pour la résolution d'équation au cours du collège. Rappelons rapidement qu'une organisation mathématique est constituée d'un ensemble de types de tâches, des techniques associées qui peuvent évoluer et des éléments technologico théoriques qui sont donnés le plus explicitement possible quand c'est possible.

Les programmes de calcul sont introduits dès la classe de sixième, tout d'abord dans le but de familiariser les élèves avec cet outil mais aussi en mettant l'accent sur la pratique du calcul et la réversibilité des opérations. Le travail est poursuivi en classe de cinquième pour que les élèves progressent de l'opération « à trou » vers l'utilisation de la lettre et de la distributivité. En classe de quatrième, si la présentation des problèmes sous forme de programme de calcul fait alors partie de la pratique quotidienne des élèves, un obstacle est la recherche des opérations qui conservent l'égalité et permettent de trouver les solutions. A chaque niveau, l'attention portée aux variables didactiques permet de faire évoluer les techniques pour construire des connaissances nouvelles (cela peut être aussi un moyen de s'adapter au niveau des élèves).

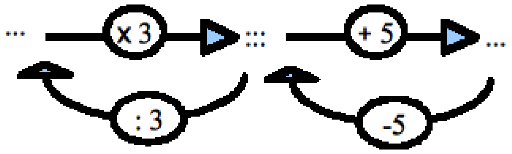
En classe de 6ème, nous utilisons les programmes de calcul pour travailler sur la réversibilité des opérations. Nous montrons aux élèves que pour « remonter le calcul » on utilise l'opération « réciproque » de chaque opération du programme en commençant par la dernière.

Par exemple avec ce programme de calcul :

Je choisis un nombre. Je le multiplie par 3. J'ajoute 5 au résultat. Quel est le résultat final si j'ai choisi 8 ? Quel nombre est choisi si j'obtiens 17 ?

La première fois que l'activité est proposée, les élèves font des essais-erreur ou modélisent le problème (le plus souvent dans leur tête) par une opération à trou. Lors de la mise en commun, les élèves débattent sur les opérations réciproques et sur l'importance de l'ordre dans lequel on les effectue. Nous mettons donc en place une technique qui est justifiée par les opérations « réciproques » même si on reste dans le cadre des nombres positifs.

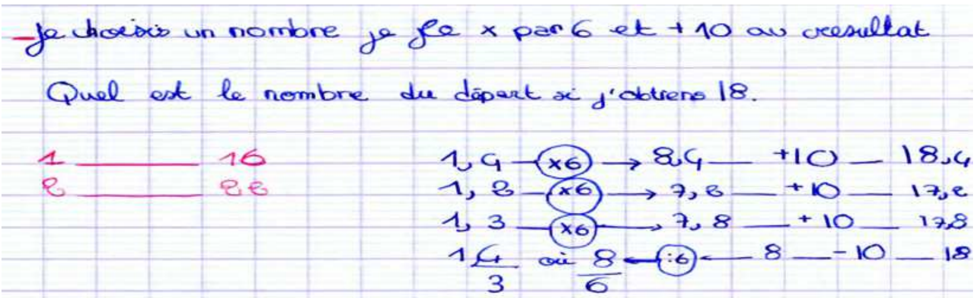
Après quelques exercices semblables, des élèves introduisent les ostensifs suivants qui sont ensuite majoritairement adoptés par la classe et qui constituent un outil local et transitoire de résolution des problèmes de ce type :



Nous introduisons aussi le quotient dans ce même esprit en proposant par exemple 6 comme nombre final dans le programme ci-dessus. Ceci permet de créer des liens entre les notions.

En classe de cinquième, nous présentons souvent le programme sous la forme d'une phrase dictée à l'oral en langue naturelle. Les élèves ont à prendre en note les informations nécessaires. Cela les incite à simplifier leur écriture jusqu'à remplacer le nombre cherché par un symbole ou, en fin d'année, par une lettre. Voici la production d'un élève de 5ème sur le problème suivant (on peut voir l'utilisation des flèches) :

Je cherche le nombre qui lorsque je le multiplie par 6 et que j'ajoute 10 au résultat donne 18.



Cet élève commence par faire deux essais (1 et 2 sont les premiers nombres auxquels les élèves pensent en général quand on débute ce genre d'activité). L'élève remarque alors que le résultat 18 se trouve entre 16 et 22 et donc réalise des essais avec des nombres décimaux compris entre 1 et 2. Le programme de calcul est symbolisé à l'aide de flèches. Après plusieurs essais (1,4 donne 18,4), l'élève « remonte » le calcul. On voit ici toute l'importance des variables didactiques car c'est bien la valeur choisie (nombre rationnel) qui oblige l'élève à avoir recours à cette méthode

Ce travail est poursuivi en faisant évoluer la technique en amenant les élèves à traduire le programme à l'aide d'une seule expression numérique pour qu'ils visualisent dans l'expression les constantes et les variables. En effet, en cinquième, débute aussi l'écriture des programmes de calcul à l'aide d'une expression littérale. L'utilité de cette écriture peut prendre du sens pour les élèves dans le cas où le programme ne peut pas être remonté. Il est alors utile de modifier l'expression en utilisant la distributivité pour obtenir une expression qui corresponde à un programme équivalent qui lui, peut être remonté. Les élèves n'ont pas recours à la résolution experte d'équations. On voit ici l'importance donnée à la propriété de distributivité qui a été travaillée par ailleurs.

L'exemple suivant montre le type de problème posé en fin de 5ème (ou début de 4ème).

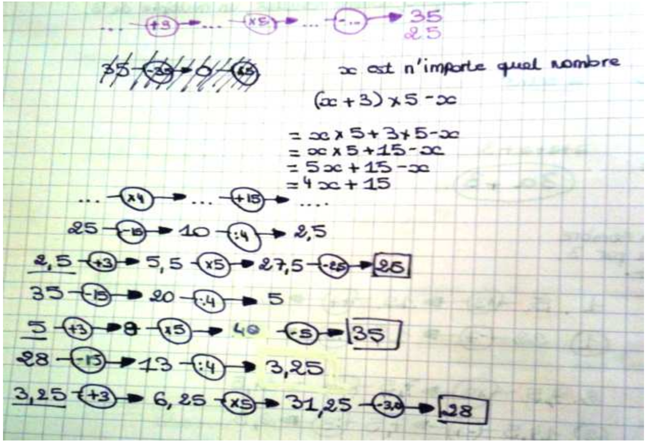
Je choisis un nombre Je lui ajoute 3 Je multiplie le résultat par 5 je soustrais le nombre choisi Quel nombre ai-je choisi si j'obtiens 35, si j'obtiens 25, si j'obtiens 28 ?

Notons que le fait de soustraire le nombre choisi pose problème à de nombreux élèves qui oublient cette partie du calcul ou soustraient x+3

Les élèves, pour la plupart, font des essais, plutôt organisés (« dichotomie »). Le troisième nombre (3,25) pose davantage de problème même si de nombreux élèves ont pensé à essayer les nombres 3,1 ; 3,2 ; 3,3 ….

Lors de la mise en commun, les élèves mettent en avant la différence entre ce programme et les précédents. Cet échange aboutit à un bilan intermédiaire : « on ne peut pas remonter ce programme car on soustrait le nombre à la dernière étape ».

Certains élèves vont introduire une expression littérale pour simplifier le programme de calcul comme en témoigne cette production d'élève qui tout d'abord symbolise le programme de calcul à l'aide de flèches, mais la dernière flèche est « vide » (-... pour symboliser que l'on retranche le nombre choisi).



Une tentative de remontée est rayée puis l'élève a recours à une expression littérale pour écrire le programme de calcul : il désigne par x le nombre choisi et utilise les propriétés d'algèbre pour simplifier le programme. Un retour au symbolisme avec les flèches permet ensuite de faire apparaître le programme simplifié qui est équivalent au précédent (prouvé). Il est ensuite possible de le remonter . Une vérification avec le programme de l'énoncé est ensuite faite.

Nous proposons alors l'institutionnalisation suivante : « un programme de ce type peut être simplifié en utilisant les propriétés d'algèbre. L'expression obtenue correspond à un programme de calcul qui peut être remonté ».

Les élèves gardent le lien entre l'écriture littérale et la présentation sous forme de programme de calcul. Il ne s'agit pas ici de résolution experte d'équations.

Lorsque l'on propose à nouveau ce type de programme de calcul, nous modifions les variables didactiques pour que les nombres cherchés soient difficilement accessibles par essais-erreur, ce qui oblige à utiliser les expressions littérales.

En classe de $4^{\text{ème}}$, notons que comme les élèves sont familiarisés avec ce type de présentation des problèmes, ils cherchent volontiers. Nous proposons alors des programmes de calculs agissant sur l'inconnue dans les deux membres.

Dans un premier temps, nous choisissons des programmes qui ont des solutions entières simples, les élèves cherchent la solution par tâtonnement. Ils s'enrichissent des stratégies de leurs pairs, ce qui conduit à des essais plus organisés (dichotomie, utilisation de la linéarité).

Nous jouons ensuite sur les variables didactiques pour décourager le tâtonnement (solutions négatives, décimales, rationnelles). Les élèves se rendent bien compte que le problème vient de la présence du nombre à chercher dans les deux membres et ils essaient de l'éliminer. L'objectif est de les amener intuitivement vers les règles d'opérations sur les égalités en passant par une représentation, l'utilisation d'un symbole à la place de la lettre (image mentale de la balance). En augmentant le coefficient de x ou en proposant un coefficient négatif, on oblige les élèves à s'extraire du dessin.

Nous continuons avec des problèmes ayant les mêmes solutions pour permettre aux élèves de comprendre les règles d'opérations sur les égalités. Durant ce travail, qui est très en amont du chapitre sur les équations, aucune formalisation n'est exigée. La question de la validité des règles utilisées nécessite qu'elles soient prouvées et institutionnalisées dans une leçon « Ordre et opération » distincte de la leçon sur les équations.

En annexe se trouvent quelques travaux d'élèves de $4^{\text{ème}}$ qui nous permettent de montrer des stratégies différentes sur le problème suivant donné oralement :

Je cherche un nombre tel que si je le multiplie par 3 et que j'ajoute 8, je trouve le même résultat que si je le multiplie par 7 et que j'ajoute 5.

- essais/erreur, de plus en plus organisés ;
- schématisation avec l'image de la balance (qui n'est possible que lorsque les nombres sont bien choisis) ;
- passage aux expressions littérales et utilisation des théorèmes d'algèbre.

Nous avons donné rapidement une organisation mathématique possible, utilisant les programmes de calcul, permettant de travailler les équations tout au long du collège. Comme nous l'avons dit, d'autres problèmes sont proposés qui nécessitent aussi d'avoir recours aux équations. Les programmes de calcul pourront être utilisés à cette occasion car il est également possible de « retraduire » des équations sous forme de programmes pour aider à la résolution et de façon plus générale, à développer des liens entre les différents types de tâches, voire les techniques.

Nous utilisons de nombreux programmes avec la gestion de classe décrite plus haut, ce qui permet de travailler l'algèbre en continu et pas seulement lors du ou des chapitres dévolus. Nous pensons que cet apprentissage est complexe et nécessite du temps.

Nous allons maintenant montrer l'utilisation des programmes de calcul pour les types de tâches qui complètent ceux relatifs aux équations et qui portent sur les preuves.

2. Pour prouver

Dans le domaine de la preuve, les programmes de calcul sont utilisés dès le début de la cinquième et jusqu'au lycée avec les objectifs suivants :

- mettre en valeur une démarche de recherche : essais, conjecture, preuve,
- convaincre de la nécessité du passage au calcul littéral pour prouver une affirmation sur une infinité de valeurs,
- montrer l'utilisation des contre-exemples,
- montrer l'intérêt des propriétés algébriques (distributivité simple, double distributivité...) dans le mécanisme de preuve,
- mettre en place des stratégies de modélisation algébrique de problèmes arithmétiques,
- travailler sur les deux aspects procédural et structural des expressions littérales,
- donner une finalité aux techniques de calcul littéral.

Enfin il est important de remarquer que la nécessité de preuve repose davantage sur le besoin d'explication que de conviction. En effet, en général, les élèves sont convaincus par leur conjecture mais ils cherchent alors à expliquer pourquoi on peut avoir telle régularité qu'il faut d'abord reconnaître (voir Barallobres, 2004).

Nous avons classé les problèmes en deux catégories :

- ceux qui portent sur la question de l'équivalence de deux programmes :
  - soit ils sont équivalents ce qui débouche sur des conjectures toujours vraies, qui permettent de montrer l'intérêt du calcul littéral pour prouver ces conjectures,
  - soit ils ne le sont pas et c'est alors la notion de contre exemple qui est mise en avant,
- ceux qui permettent de prouver des propriétés arithmétiques. C'est souvent à cette occasion que l'aspect procédural est travaillé.

a) Equivalence des programmes

Un des premiers problèmes que nous proposons en classe de 5ème avec des nombres décimaux positifs a pour objectif est de mettre en échec l'idée que « si une conjecture est vraie pour plusieurs nombres, alors, forcément, elle est vraie pour une infinité de nombres ». Cet exercice ne nécessite pas du tout l'introduction d'expressions littérales, il est fait pour travailler l'idée du contre exemple.

> Voici deux programmes de calcul. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? «Si on choisit le même nombre pour les deux programmes, le programme 1 donnera toujours un résultat supérieur au programme 2»
> **Programme 1:** Choisis un nombre. Ajoute 3 et multiplie le résultat par 9
> **Programme 2 :** Choisis un nombre. Multiplie le par 0,05. Multiplie le résultat par le nombre choisi

L'institutionnalisation proposée est : « On peut émettre une conjecture en s'appuyant sur plusieurs essais, mais même un grand nombre d'essais ne permet pas de généraliser à une infinité de cas. Par contre, un contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse. »

Voici un autre programme qui pourra être utilisé à partir de la 4ème jusqu'en 2nde .

> Voici un programme de calcul. Fais plusieurs essais. Le résultat est-il toujours positif ou négatif ?
> Choisis un nombre. Soustrais 1. Calcule le carré du résultat. Soustrais 2. Ajoute le double du nombre choisi.

Cette activité nécessite de connaître la notion de carré d'un nombre. Elle peut être utilisée en classe de 4ème en alternative au problème précédent. Dans ce cas, elle fera l'objet de la même institutionnalisation. Elle peut être également utilisée en 2nde, où elle pourra faire l'objet d'une institutionnalisation plus riche :

- « La réponse » à une question n'est pas toujours oui ou non.
- Les solutions d'une inéquation ne sont pas toujours «les nombres plus grands (respectivement plus petits) qu'un nombre précis » : idée fausse répandue chez nos élèves de 3ème.
- Mise en évidence de l'utilité de la représentation graphique d'une fonction, et/ou de la factorisation et d'un tableau de signes.

Toujours en 5ème, nous proposons ensuite des problèmes, très simples au départ, dans lesquels il s'agit de faire réfléchir les élèves sur comment prouver qu'une conjecture est vraie pour une infinité de nombres sachant que l'on ne peut pas tester pour tous les nombres. Notons que ces programmes peuvent être utilisés sans que « la lettre » ait été introduite comme dans l'exemple suivant :

> Voici deux programmes de calcul : Compare ces deux programmes. Que remarques-tu ? Ta remarque est-elle vraie pour n'importe quel nombre ?
> **Programme 1:** Choisis un nombre. Ajoute 7 et ajoute le nombre choisi.

Programme 2 : Choisis un nombre. Multiplie le par 2. Ajoute 3 et ajoute 4

L'institutionnalisation porte sur le fait que pour prouver qu'une conjecture est vraie sur une infinité de nombres, il faut s'intéresser non plus au résultat des calculs à faire, mais aux opérations et à leurs propriétés.

Des problèmes de ce type sont répétés d'abord sur des programmes simples, puis, une fois la lettre introduite sur d'autres, complexifiés de manière à rendre difficile une preuve sans utilisation du langage algébrique. Ainsi, les deux problèmes suivants, plutôt utilisés en $4^{ème}$, permettent d'utiliser le calcul littéral en s'appuyant sur la propriété de la distributivité pour prouver. Encore une fois, nous modifions les variables didactiques pour faire évoluer les procédures. Notons que les élèves n'utilisent pas spontanément les expressions littérales mais ils vont, pour expliquer, faire des raisonnements génériques sur lesquels le professeur pourra s'appuyer pour aller vers la généralisation et la preuve.

Voici deux programmes de calcul : Compare ces deux programmes. Que remarques-tu ? Ta remarque est-elle vraie pour n'importe quel nombre ? **Programme 1:** Choisis un nombre. Ajoute 7 et multiplie le résultat par 8. **Programme 2 :** Choisis un nombre. Multiplie le par 8 et ajoute 56

Voici un programme de calcul : Essaie-le sur plusieurs nombres. Que remarques-tu ? Ta remarque est-elle vraie pour n'importe quel nombre ? **Programme :** Choisis un nombre. Ajoute 8 et multiplie le résultat par 3. Enlève 24 et enlève le double du nombre de départ.

Des problèmes plus complexes, comme le suivant, sont proposés en $3^{ème}$ et 2^{nde}. Ils permettent de travailler la notion d'identité et de faire une distinction explicite entre identité et équation. Ce qui est intéressant dans ce programme est que différentes conjectures peuvent être formulées dont certaines sont plus ou moins faciles à prouver et ne nécessitent pas les mêmes compétences techniques. Par exemple, «le résultat est : « toujours un carré », « toujours le carré du premier plus trois », « toujours le carré du premier plus six fois le premier plus neuf ». On travaille ici sur la reconnaissance d'une expression algébrique et non plus seulement sur le caractère procédural.

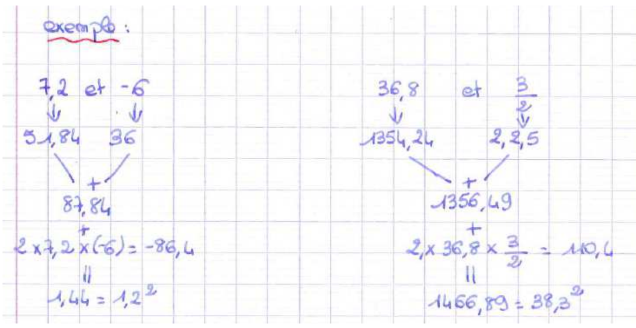
Voici un programme de calcul : Fais plusieurs essais. Qu'observes-tu ? Prouve ce que tu viens d'observer. **Programme :** Choisis un nombre. Ajoute 6. Multiplie le résultat par le nombre choisi. Ajoute 9.

Pour terminer cette partie, voici un travail spécifique pour introduire les identités remarquables en classe de $3^{ème}$. Notons tout d'abord que dans la plupart des manuels, les identités remarquables sont introduites dans le sens du développement (qui correspond au sens de leur preuve). Mais elles apparaissent alors aux élèves comme des outils peu pertinents (voire inutiles) puisqu'ils connaissent la double distributivité qui leur permet de développer des carrés. Nous avons donc choisi d'introduire les identités remarquables dans le sens de la factorisation. Dans ce cas l'usage des identités se révèle pertinent notamment pour la résolution d'équations ou d'inéquations. De plus, comme pour la règle de la distributivité, si l'on travaille dans un cadre algébrique avec des nombres relatifs, la deuxième identité remarquable $(a-b)^2$ est inutile. Nous avons donc fait le choix de ne pas la donner.

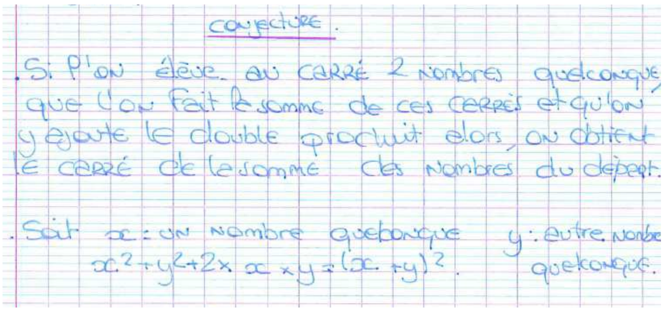
La première identité remarquable, qui donne lieu à une propriété inscrite dans le cours, est introduite par le programme de calcul suivant.

Choisis deux nombres quelconques. Calcule le carré de chacun. Additionne les carrés. Puis ajoute deux fois leur produit.

Voici une production d'élève qui montre la nature des nombres qu'il prend pour les essais. En choisissant ces nombres l'élève va remarquer des régularités qui lui permettent d'établir une conjecture et de se convaincre que cette conjecture est vraie puisqu'elle est établie avec des nombres de natures bien différentes.



Dans cette autre production, on remarque les deux formulations de la conjecture de l'élève en langue naturelle et avec le symbolisme mathématique. Plus généralement, on peut remarquer que dans cette classe, sur toutes les conjectures proposées, les quantificateurs sont présents. Cela tient vraisemblablement au travail fait en amont avec les autres programmes de calcul, mais aussi la manière de formuler l'énoncé. Ici, « quelconque » désigne l'ensemble des nombres que les élèves connaissent).


Conjecture.

Si l'on élève au carré 2 nombres quelconque que l'on fait la somme de ces carrés et qu'on y ajoute le double produit alors on obtient le carré de la somme des nombres du départ.

Soit x : un nombre quelconque y : autre nombre quelconque.

$x^2+y^2+2\times x\times y=(x+y)^2$.

Lors de l'institutionnalisation nous proposons une autre symbolisation qui nous permet, en dépassant la traditionnelle formule, de montrer qu'elle peut être appliquée à des expressions littérales.

> Quels que soient les nombres ou expressions mis à la place de $\bigcirc$ ou de $\square$ on a
>
> $$\bigcirc^2+\square^2+2\bigcirc\square=(\bigcirc+\square)^2$$

b) Prouver des propriétés arithmétiques

Outre l'intérêt de travailler sur les preuves en algèbre, nous proposons des preuves portant sur des propriétés arithmétiques. Cela nous permet de travailler sur l'expression algébrique de deux nombres entiers consécutifs, de nombres pairs ou impairs, de multiples de …, etc. Encore une fois, des activités sont proposées dès la classe de 5$^{\text{ème}}$.

> Voici un programme de calcul : L'affirmation « ce programme donnera toujours un résultat impair » est-elle vraie ou fausse ?
> **Programme :** Choisis un nombre entier. Ajoute son suivant

Ensuite et jusqu'en 2$^{\text{nde}}$, on pourra proposer les activités suivantes :

> Voici un programme de calcul. Réalise plusieurs essais. Rédige une conjecture et prouve-la !
> **Programme :** Choisis quatre nombres entiers consécutifs. Calcule le produit du premier et du quatrième. Calcule le produit du deuxième et du troisième. Calcule la différence des deux produits.

> Choisis trois nombres consécutifs. Calcule le carré de celui du milieu. Soustrais le produit des extrêmes.

Ou encore

> Choisis 2 nombres consécutifs. Calcule la différence entre le carré du second et le carré du premier.

Notons que ce dernier exemple est tout à fait intéressant pour travailler le caractère procédural et structural des expressions littérales puisque le résultat donne toujours un nombre impair. On pourra donc faire énoncer la propriété suivante « la différence des carrés de deux entiers consécutifs est toujours un nombre impair », qui en découle assez facilement même si les élèves l'énoncent davantage sous sa forme procédurale « la différence des carrés de deux entiers consécutifs est toujours deux fois le premier nombre plus 1 » ou bien « la différence des carrés de deux entiers consécutifs est toujours la somme de ces deux nombres ». L'énoncé de ces propriétés est fait en lisant l'expression littérale dans le sens classique de la lecture de gauche à droite. Mais si on la lit dans le sens de droite à gauche, on obtient « tout nombre impair est la différence des carrés de deux nombres consécutifs ». Ceci permet alors relancer le problème en donnant un nombre impair et en cherchant les deux nombres consécutifs.

D. Conclusion

En partant des différentes études sur l'enseignement actuel de l'algèbre au collège, nous avons fait l'hypothèse que les savoirs algébriques risquaient d'être morcellés ou atomisés, que les types de tâches algébriques pouvaient se révéler isolées, avec des finalités assez pauvres. Ceci nous a conduit dans un premier temps à élaborer des activités pour lesquelles l'introduction de la lettre se révélait sinon indispensable mais au moins fortement utile. Nous utilisons maintenant les programmes de calcul comme un outil qui nous permet de travailler sur la progression des apprentissages dans le temps et nous avons commencé à élaborer une organisation mathématique portant sur les équations et sur les preuves en algèbre. C'est ce que nous avons présenté ici.

Mais ce travail suppose des changements dans la gestion et l'organisation de la classe. Par exemple, l'organisation de l'année en chapitres s'en trouve fortement modifiée : certains chapitres classiques tels « calcul littéral » ou « équations » étant travaillés tout au long de l'année. L'évaluation est, elle aussi, plus progressive, sur l'année et aurait donc un caractère plus formatif.

Une autre question porte sur les techniques successives qui sont introduites : on a vu que celles-ci peuvent évoluer par un jeu sur les variables didactiques mais il n'est pas toujours facile de modifier ces variables compte-tenu des connaissances mathématiques des élèves sur les nombres ou sur les techniques de calcul littéral ou de résolution d'équations. Nous n'avons notamment pas parlé des nombres relatifs dans cet article, mais ceux-ci sont déterminants dans notre organisation mathématique. Nous voyons donc qu'un travail important reste à faire.

Enfin, cette recherche envisage une perspective globale sur le collège et il montre qu'il nécessite des changements importants dans les pratiques des enseignants. Comment intervenir en formation initiale et continue pour à la fois initier des questionnements mathématiques sur l'algèbre comme savoir à enseigner et sur les pratiques ? La recherche collaborative nous semble être une piste de réponse à cette question.

Références bibliographiques

Assude, T., Coppé, S. & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : atomisation et réduction. In Recherche en didactique des mathématiques Hors série. Enseignement de l'algèbre élémentaire Bilan et perspectives. Coordonné par Coulange, Drouhard, Dorier & Robert. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Barallobres G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. RDM Vol 24, n° 2.3, pp 285-328. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, Vol 92, 13-15.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). Introduction Approaches to algebra. In : Bednarz et al. (eds). *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Ben Nejma S. (2009). D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes - une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le contexte scolaire tunisien. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Booth, L. (1985). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, **5**, 5-17.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* **vol 7/2,** 33-116. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Chevallard, Y. (1985 bis). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. Grenoble : *Petit x* **5,** 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Grenoble : *Petit x* **19,**.43-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Grenoble : *Petit x* **30,** 5-38.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche Anthropologique. La notion d'organisation praxéologique. *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques*. 119-140. Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche en didactique des mathématiques **vol 19/ 2,** 221-266. Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2012) & Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacements et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. In Recherche en didactique des mathématiques Hors série. Enseignement de l'algèbre élémentaire Bilan et perspectives. Coordonné par Coulange, Drouhard, Dorier & Robert. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Combier G., Guillaume J.-C., Pressiat A. (1996) *Les débuts de l'algèbre au collège.* Paris : INRP.

Coulange, L. (2000). Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième. Thèse de l'Université de Grenoble.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*. **Vol. 7/2**, 5-31. Grenoble : La pensée sauvage.

Drouhard, J. P. (1992). Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire. Thèse de l'Université de Paris 7.

Drouhard, J-P. (1995) Algèbre, calcul symbolique et didactique. In Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (Eds.) *Actes de la 8e Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp.325–344). Clermont-Ferrand: IREM.

El Mouhayar, R. (2007). Etude des pratiques d'enseignement des mathématiques au niveau de l'école moyenne (11-15) dans le cas de l'algèbre en France et au Liban. Thèse de l'Université Lumière Lyon 2.

Gascon, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternance à «l'arithmétique généralisée ». Grenoble : *Petit x* **37,** 43-63.

Grugeon, B. (1995). Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G. Thèse de l'Université de Paris VII.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In *Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education.* P. Nesher et J. Kilpatrick Edits. Cambridge University Press.

Kirshner D, & Awtry, T. (2004). Visual Salience of algebraic transformations. *Journal for research in mathematics Education*, **Vol 35/4**, 224-237.

Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2013). TRAIN Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiative. Bulletin de l'APMEP n° 502.

Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2010). Le calcul réfléchi : entre sens et technique. Bulletin de l'APMEP, n°488.

Schmidt, S. (1996). La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. *Revue des sciences de l'éducation* vol XXII, n° 2.

Schmidt, S., & Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes : Difficultés rencontrées par les futures enseignants. *Educational studies in mathematics*, vol 32/2.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22.

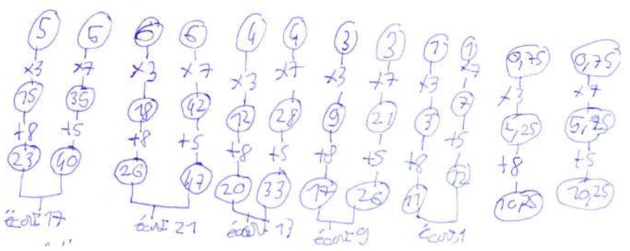
Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* Textes réunis par C. Laborde. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. N. Bednarz et C. Garnier Edits. CIRADE.

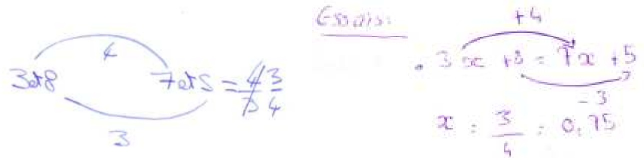
Annexe 1

> lleroux 27/12/12 18:12
> **Commentaire:** *En revanche, rappeler ici le texte du programme de calcul peut être utile.*

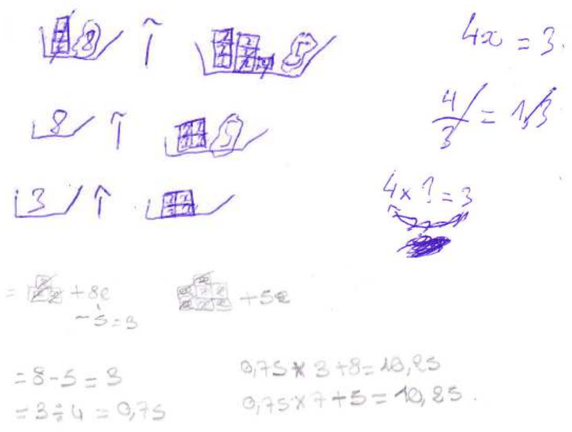
- Elève A : essais erreurs organisés en utilisant les écarts entre les résultats des deux programmes



Elèves B et C : un travail sur les écarts entre les termes avec l'inconnue et les nombres dans chaque membre avec une vérification et des essais sur le signe et les nombres à diviser. Un travail sur les écarts entre les termes avec l'inconnue et les nombres dans chaque membre avec une vérification et des essais sur le signe et les nombres à diviser.



Elèves D et E : une méthode qui utilise des dessins pour symboliser l'inconnue (avec élimination de chaque côté comme pour une balance)



Elève F : méthode experte

$x \times 3 + 8 = x \times 7 + 5$

$3x + 8 = 7x + 5$

$-3x \quad -3x$

$8 = 4x + 5$

$-5 \quad -5$

$3 = 4x = \frac{3}{4} = 0{,}75$